

ALGEBRĂ

NUMERE REALE

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$: mulțimea nr. *naturale*

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-1, -2, -3, \dots\} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$: mulțimea nr. *întregi*

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$: mulțimea nr. *raționale*

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: mulțimea nr. *reale*

$\geq$ Orice număr rațional se scrie sub formă de fracție zecimală finită sau infinită periodică, cu perioada diferită de 0 sau 9.

FORMULE DE CALCUL PRESCURTATE

$a, b \in \mathbb{R}$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \dots + b^{n-1}), (\forall)n \in \mathbb{N}$$

$$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a + b)(a^{2k} - a^{2k-1} \cdot b + a^{2k-2} \cdot b^2 - \dots + b^{2k}), (\forall)k \in \mathbb{N}^*$$

ORDONAREA NR. REALE

$$a < b \mid \cdot c \implies \begin{cases} c > 0 \implies ac < bc \\ c < 0 \implies ac > bc \end{cases}$$

$$m_a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}; m_h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}; m_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

$\geq$ Mediile sunt, de la stânga la dreapta: media *aritmetică*, media *armonică* și media *geometrică*. Pentru $n = 2$, $m_h \leq m_g \leq m_a$, $\forall x, y > 0$.

INEGALITATEA CAUCHY-BUNIAKOVSKI-SCHWARZ (CBS)

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2, \forall a, b, x, y \in \mathbb{R}$$

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 \iff \frac{a}{x} = \frac{b}{y}, x, y \neq 0$$

$\geq$ Generalizare:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2, \forall a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$$

$\geq$ Inegalitatea Bergstrom:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x + y)^2}{a + b}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

MODULUL UNUI NUMĂR REAL

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x \leq 0 \end{cases}$$

≥ Proprietăți:

$$|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$|x| = 0 \iff x = 0$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \forall x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}; \text{egalitate} \iff x \text{ și } y \text{ au același semn } |x| = |-x|, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$|x| = a, a > 0 \iff x \in \{-a, a\}$$

$$|x| \leq a, a > 0 \iff -a \leq x \leq a \iff x \in [-a, a]$$

$$|x| \geq a, a > 0 \iff x \leq -a \text{ sau } x \geq a \iff x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$$

$$|x| = |y| \iff a = \pm b$$

PARTEA ÎNTREAGĂ ȘI PARTEA FRAȚIONARĂ A UNUI NR. REAL

≥ Prin *partea întreagă* a nr. real x înțelegem cel mai mare nr. întreg mai mic-egal decât x :

$$[x] = k \in \mathbb{Z} \iff x \in [k, k + 1).$$

≥ Proprietăți:

$$[x] \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$[x] = k \in \mathbb{Z} \iff x \in [k, k + 1)$$

$$[x] = x \iff x \in \mathbb{Z}$$

$$[x] \leq x < [x] + 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$[x + k] = [x] + k, \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$$

≥ *Partea fracționară* a unui nr. real x reprezintă diferența dintre x și partea sa întreagă $[x]$:

$$\{x\} = x - [x].$$

≥ Proprietăți:

$$0 \leq \{x\} < 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\{x\} = 0 \iff x \in \mathbb{Z}$$

ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

≥ Un enunț despre care putem spune că este adevărat sau fals, dar nu ambele, se numește *propoziție logică*.

≥ *Valorile de adevăr* sunt "adevărat" ("A" sau "1") și "fals" ("F" sau "0").

≥ Prin *negația* propoziției logice p înțelegem propoz. notată $\neg p$ sau $\bar{p}$ numită "*non p*" care este

adevărată când p este falsă și este falsă când p este adevărată.

≥ *Tabel de adevăr* pentru negația propozițiilor:

p	$\neg p$
1	0
0	1

≥ *Conjuncția* propozițiilor p și q este propoz. notată " $p \wedge q$ " care este adevărată numai dacă ambele propoziții sunt adevărate.

≥ *Disjuncția* propozițiilor p și q este propoz. notată " $p \vee q$ " (citită " p sau q ") care este adevărată atunci când cel puțin una dintre propoz. p și q este adevărată.

≥ *Implicația* propozițiilor p și q , notată $p \rightarrow q$ sau $(\neg p) \vee q$, este falsă doar dacă p este adevărată și q falsă.

p	q	$p \wedge q$	$\parallel$	p	q	$p \vee q$	$\parallel$	p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$
1	1	1	$\parallel$	1	1	1	$\parallel$	1	1	0	1

p	q	$p \wedge q$	$\parallel$	p	q	$p \vee q$	$\parallel$	p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$
1	0	0	$\parallel$	1	0	1	$\parallel$	1	0	0	0
0	1	0	$\parallel$	0	1	1	$\parallel$	0	1	1	1
0	0	0	$\parallel$	0	0	0	$\parallel$	0	0	1	1

$\geq$ *Echivalența* propozițiilor p și q , notată $p \leftrightarrow q$ sau $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, este adevărată doar dacă p și q au aceeași valoare de adevăr. **Observație:** $(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$, unde $\equiv$ indică *identitatea din punct de vedere logic*.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

$\geq$ Prin *formulă propozițională* înțelegem o expresie în care apar mai multe propoz. legate între ele prin *conectori logici*: $\alpha = \alpha(p, q, r, \dots)$, $\beta = \beta(p, q, r, \dots)$. $\alpha \equiv \beta$ dacă pentru orice înlocuire a propozițiilor cu valori de adevăr cele două formule au aceeași formulă de adevăr. Spre exemplu, $\alpha \equiv \beta$, unde α reprezintă formula $\neg(p \vee q)$ și β reprezintă formula $(\neg p) \wedge (\neg q)$:

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

$\geq$ O formulă prop. care este adevărată indiferent de valorile de adevăr ale prop. componente se numește *tautologie* sau *formulă identic adevărată*. De pildă, formula $\alpha \equiv p \vee (\neg p)$ reprezintă o astfel de tautologie:

p	$\neg p$	$p \vee (\neg p)$
1	0	1
0	1	1

$\geq$ Un enunț care depinde de una sau mai multe variabile și doar prin înlocuirea variabilelor cu diverse valori devin propoziții logice se numește *predicat*. În funcție de câte variabile apar avem:

1. *predicat unar*: depinde de o singură variabilă: " $P(x)$ ", $x \in M$
2. *predicat binar*: depinde de două variabile: " $P(x, y)$ ", $x \in M$
3. *predicat ternar*: depinde de trei variabile: " $P(x, y, z)$ ", $x \in M$

$P(x) :$	$"x > 3", x \in \mathbb{R}$	$\parallel$	$Q(x, y) :$	$"x \mid y", x, y \in \mathbb{N}$
$P(3) :$	"F"	$\parallel$	$Q(2, 3) :$	"F"
$P(5) :$	"A"	$\parallel$	$Q(3, 6) :$	"A"

$\geq$ **Propoziția universală** " $(\forall x) P(x)$ " este adevărată atunci când $\forall x_0 \in M$, $P(x_0)$ este adevărată, unde " $\forall$ " se numește *cuantificator universal*. Dacă găsim o singură valoare $\alpha \in M$ astfel încât $P(\alpha)$ este falsă, atunci propoziția universală este falsă și α se numește *contraexemplu*. Exemplu: $P(x) : (x^2 > 0) x \in \mathbb{R}$

$$(\forall x) P(x) : \forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0 \text{ "F"}$$

$$P(0) : 0^2 > 0 \text{ "F"}$$

$\geq$ **Propoziția existențială** " $(\exists x) P(x)$ " este adevărată dacă există cel puțin o valoare $x_0 \in M$ astfel încât $P(x_0)$ este adevărată. Propoziția existențială este falsă dacă $\forall x_0 \in M$ $P(x_0)$ este falsă, unde " $\exists$ " se numește *cuantificator existențial*. Exemplu: $(\exists x) "x^2 > 0" x \in \mathbb{R}$ "A"

$$P(1) : 1^2 > 0 \text{ "A"}$$

INDUCȚIA MATEMATICĂ

$\geq$ Fie $P(n)$ o propoziție care depinde de un nr. natural n . Dacă propoziția $P(0)$ este adevărată și din $P(k)$ adevărată, $k \in \mathbb{N}$ oarecare rezultă $P(k+1)$ adevărată atunci $P(n)$ este adevărată $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\geq$ Fie $P(n)$ o propoziție care depinde de $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$. Această metodă presupune două etape:

1. verificăm dacă $P(m)$ este "A"
2. presupunem că $P(k)$ este "A", $k \in \mathbb{N}$, $k \geq m$, oarecare și demonstrăm $P(k+1)$ este "A"

Dacă qambele etape au loc atunci $P(n)$ "A" $\forall n \geq m$.

$\geq$ Se definesc următoarele notații:

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} \quad \text{și} \quad 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot n^2 = \prod_{k=1}^n k^2,$$

unde operatorul Σ indică "sumă pentru k de la 1 la n " și operatorul Π indică "produs pentru k de la 1 la n ".

ȘIRURI DE NUMERE REALE

$\geq$ O funcție este notată $f : A \rightarrow B$; $\forall x \in A \exists f(x) \in B$ unic, unde A se numește *domeniu de definiție*, B *codomeniu* sau *mulțimea imaginilor* și $f(x)$ *imagea lui x prin funcția f* .

$\geq$ O funcție $f : \mathbb{N}_k \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *șir de numere reale*, unde $\mathbb{N}_k = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq k, k \geq \mathbb{N}\}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq k \rightarrow f(n) \in \mathbb{R}$ unic, unde $f(n) = a_n \in \mathbb{R}$ se numește *termenul de rang n al șirului*. **Observație:** orice șir are o infinitate de termeni. Un șir poate fi definit prin unul dintre următoarele trei moduri:

1. prin *enumerare*
2. cu ajutorul unei *formule* sau a mai multor formule, unde formula reprezintă o legătură dintre rang și valoare: $b_n = \frac{2n-1}{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (de exemplu).

3. printr-o *relație de recurență*, unde relația de recurență reprezintă o legătură între doi sau mai mulți termeni consecutivi ai șirului: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \forall n \geq 2$ (de exemplu).

≥ Spunem că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este:

1. *strict crescător* dacă $a_n < a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}^*$
2. *crescător* dacă $a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$
3. *strict descrescător* dacă $a_n > a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$
4. *descrescător* dacă $a_n \geq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}^*$

≥ Un șir $(a_n)_{n \geq 1}$ se numește *mărginit* dacă $\exists a, b \in \mathbb{R}, a < b$ astfel încât $a \leq a_n \leq b, \forall n \in \mathbb{N}^*$, unde a se numește *margină inferioară* și b *margină superioară*.

≥ Un șir în care fiecare termen începând cu al doilea se obține din cel anterior prin adunarea aceluiași număr real numit *rație* se numește *progresie aritmetică*: $a_n = a_{n-1} + r, \forall n \geq 2$.

Formula pentru termenul de rang n al unei progresii aritmetice în funcție de rația r și primul termen a_1 este următoarea: $a_n = a_1 + (n - 1)r$. **Observație:** o progresie aritmetică este unic determinată de primul său termen și de rație.

≥ Spunem că numerele reale $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt în progresie aritmetică dacă sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice: $\div x_1, x_2, \dots, x_n$.

≥ Un șir $(a_n)_{n \geq 1}$ este progresie aritmetică dacă și numai dacă fiecare termen începând cu al doilea este media aritmetică a termenilor vecini lui:

≥ Notăm suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice astfel:

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, n \in \mathbb{N}^*$ Suma aceasta se calculează folosind următoare formulă:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \forall n \geq 2; \quad S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Observație: în orice progresie aritmetică suma termenilor extremi este constantă:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots = a_k + a_{n+1-k}.$$

≥ Un șir în care primul termen este nenul și fiecare termen începând cu al doilea se obține din cel anterior prin înmulțire cu același număr real nenul se numește *progresie geometrică*: $(b_n)_{n \geq 1}$ prog. geometrică $\iff b_n = b_{n-1} \cdot q, \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. Numărul real q cu care înmulțim se numește *rația* progresiei. **Observație:**

$$(b_n)_{n \geq 1} \text{ prog. geometrică } \iff b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}, b_n > 0 \text{ sau } b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, b_n \in \mathbb{R}.$$

≥ Un șir cu termeni pozitivi este progresie geometrică dacă și numai dacă fiecare termen începând cu al doilea este media geometrică a vecinilor săi.

≥ Spunem că numerele reale $x_1, x_2, \dots, x_n$ se află în progresie geometrică dacă sunt termeni consecutivi ai progresiei (nu neapărat primii): $\cdot x_1, x_2, \dots, x_n$.

≥ Suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice poate fi calculată folosind următoarea formulă:

$$S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, q \neq 1 \text{ sau } S_n = b_1 \cdot n, q = 1$$

PROPRIETĂȚILE GENERALE ALE FUNCȚIILOR

≥ Amintim notația și definiția unei funcții: $f: A \rightarrow B \implies \forall x \in A \exists f(x) \in B$, unde A se

numește domeniu de definiție și B codomeniu sau *domeniu de valori*. Graficul funcției f reprezintă mulțimea $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$. Dacă punctul $(x, y) \in G_f$, atunci $f(x) = y$. Numărul de funcții $f : A \rightarrow B$ este $(\text{card } B)^{\text{card } A}$.

≥ Funcția $g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) \forall x \in A$ se numește *restricție* a funcției f și se notează $f|_A$.

Funcția f se numește *prelungire* a funcției g .

≥ Fie funcția numerică $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ și $A \subseteq D$: dacă $A \subset D$, $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ se numește *imaginea* mulțimii A prin f ; dacă $A = D$, $Im f = \{f(x) \mid x \in D\}$ se numește *imaginea* funcției f .

≥ Spunem că o funcție $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este *mărginită* dacă $Im f \subset [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$. **Observație:** o funcție trebuie să aibă ambele margini pentru a fi mărginită.

FUNCȚIA DE GRADUL I

≥ Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ se numește *funcție afină*. Dacă $a \neq 0$, atunci funcția f se numește *funcție de gradul I*. Dacă $a = 0$, atunci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = b \in \mathbb{R}$ se numește *funcție constantă*. **Observație:** graficul funcției afine (constantă sau de gradul I) este o dreaptă.

≥ O mulțime $D \subseteq \mathbb{R}$ se numește *simetrică față de origine* dacă $\forall x \in D \implies -x \in D$.

≥ Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime simetrică față de origine. Spunem că o funcție $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este funcție *pară* dacă $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in D$ sau funcție *impară* dacă $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D$.

≥ Două puncte A și B sunt simetrice față de un punct M dacă are loc relația $MA \equiv MB$, $M \in (AB)$. Două puncte A și B sunt simetrice față de o dreaptă d dacă $AB \perp d$, $AB \cap d = \{M\}$ și $MA \equiv MB$.

≥ Spunem că graficul funcției f este *simetric* față de dreapta de ecuație $x = a$ dacă $f(a - x) = f(a + x)$, $\forall x \in D$, unde dreapta $x = a$ se numește *axă de simetrie*. **Observație:** $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ funcție pară $\iff f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D$

$$f(0 - x) = f(0 + x), x \in D$$

dreapta $x=0$ (axa Oy) axă de simetrie.

≥ Spunem că graficul funcției f este simetric față de punctul $P(a, b)$ dacă

$f(a - x) + f(a + x) = 2b$, $\forall x \in D$. Punctul P se numește *centru de simetrie*. **Observație:** $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ funcție impară $\iff f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D$

$$f(-x) + f(x) = 0$$

$$\frac{f(0 - x) + f(0 + x)}{2} = 0$$

$O(0, 0)$ centru de simetrie.

≥ Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ (funcție numerică). Spunem că funcția f este:

1. *strict crescătoare* pe D dacă $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$
2. *strict descrescătoare* pe D dacă $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$
3. *strict monotonă* pe D dacă este strict crescătoare sau strict descrescătoare
4. *crescătoare* ($\nearrow$) pe D dacă $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$
5. *descrescătoare* ($\searrow$) pe D dacă $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$
6. *monotonă* pe D dacă este crescătoare sau descrescătoare

≥ Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2$

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$$

dacă $x_1, x_2 \in [0, +\infty) \implies f(x_1) - f(x_2) < 0$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

f strict $\nearrow$ pe $[0, +\infty)$

dacă $x_1, x_2 \in (-\infty, 0) \implies f(x_1) - f(x_2) > 0$

$$f(x_1) > f(x_2)$$

f strict $\searrow$ pe $(-\infty, 0)$,

unde $[0, +\infty)$ și $(-\infty, 0]$ se numesc *intervale de monotonie*.

$\geq$ Se definesc următoarele funcții: $\max(a, b) \begin{cases} a, & a \geq b \\ b, & a < b \end{cases}$, și $\min(a, b) \begin{cases} a, & a \leq b \\ b, & a > b \end{cases}$.

$\geq$ Dacă o funcție este monotonă pe o mulțime atunci ea are aceeași monotonie pe orice submulțime a mulțimii date:

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$$

presupunem f strict $\nearrow$ pe $D \iff \forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$

$A \subset D$ fie $x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \implies x_1, x_2 \in D \implies f(x_1) < f(x_2)$.

Reciproca afirmației este, în general, **falsă**.

$\geq$ Dacă funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \leq a \\ f_2(x), & x > a \end{cases}$ este strict $\nearrow$ pe $(-\infty, a]$ și pe $(a, +\infty)$

trebuie să aibă loc și relația $f_1(a) \leq f_2(a)$ astfel încât f să fie strict $\nearrow$ pe $\mathbb{R}$. Analog, dacă f este strict $\searrow$ pe $(-\infty, a]$ și pe $(a, +\infty)$ trebuie să aibă loc și relația $f_1(a) \geq f_2(a)$ astfel încât f să fie strict $\searrow$ pe $\mathbb{R}$.

$\geq$ Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$. Spunem că f este periodică dacă $\exists T \in \mathbb{R}, T \neq 0$ cu proprietatea $f(x + T) = f(x), \forall x \in D$. Numărul real $T \neq 0$ se numește *perioadă* a funcției f . **Observație:** dacă o funcție are o perioadă atunci ea are o infinitate de perioade:

$$f(x + kT) = f(x), \forall x \in D, \forall k \in \mathbb{Z}^*.$$

$\geq$ Dacă $T \neq 0$ este o perioadă a funcției f atunci numerele $kT, k \in \mathbb{Z}^*$ sunt perioade ale funcției f , adică f admite o infinitate de perioade. Dacă există, cea mai mică perioadă strict pozitivă se numește *perioadă principală*.

$\geq$ Fie funcțiile $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$ (numerice). Se definesc următoarele *operații cu funcții*:

1. adunarea: $f + g : D \rightarrow \mathbb{R}, (f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in D$, unde $(f + g)(x)$ reprezintă *funcția sumă*
2. produsul: $f \cdot g : D \rightarrow \mathbb{R}, (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \forall x \in D$, unde $(f \cdot g)(x)$ reprezintă *funcția produs*
3. împărțirea: $\frac{f}{g} : D_1 \rightarrow \mathbb{R}, (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \forall x \in D$, unde $(\frac{f}{g})(x)$ reprezintă *funcția cât* și $D_1 = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$

$\geq$ Dacă $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ prin *compunerea* funcțiilor g și f înțelegem funcția notată $g \circ f$

cu proprietățile: $g \circ f : A \rightarrow C$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \forall x \in A. \quad \textbf{Observații: } g \circ f \text{ are sens } \iff \text{domeniul de}$$

definiție al lui g coincide cu codomeniul lui f ; suma a două funcții strict

crescătoare/descrescătoare este o funcție strict crescătoare/descrescătoare; compunerea a două funcții de aceeași monotonie este o funcție strict crescătoare; compunerea a două funcții de monotonii diferite este o funcție strict descrescătoare. În general, compunerea funcțiilor **nu** este comutativă. Compunerea funcțiilor este, în schimb, asociativă:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D \implies \begin{aligned} h \circ (g \circ f) &: A \rightarrow D \\ (h \circ g) \circ f &: A \rightarrow D. \end{aligned}$$

Altfel spus, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

≥ Funcția $1_A : A \rightarrow A$, $1_A(x) = x$, $\forall x \in A$ se numește *funcția identică* a mulțimii A :

$1_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $1_{\mathbb{N}}(n) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$A \xrightarrow{1_A} A \xrightarrow{f} B$$

$$(f \circ 1_A)(x) = f(1_A(x)) = f(x) \implies f \circ 1_A = f \text{ element neutru la dreapta}$$

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{1_B} B$$

$$(1_B \circ f)(x) = 1_B(f(x)) = f(x) \implies 1_B \circ f = f \text{ element neutru la stânga}$$

FUNCȚIA DE GRADUL II

≥ O ecuație de forma $ax^2 + bx + c = 0$ (1) unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ se numește *ecuație de gradul al doilea*. Numerele reale a, b, c se numesc *coeficienți* ai ecuației, iar x se numește *necunoscută*.

≥ Prin *soluție* a ecuației (1) înțelegem un nr. real α cu proprietatea $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$.

≥ *Rezolvarea* ecuației de gradul II presupune aflarea *rădăcinilor* x_1, x_2 folosind formula $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, unde Δ se numește *discriminant* și are formula $\Delta = b^2 - 4ac$. În funcție de semnul lui delta (Δ), soluțiile oricărei ecuații aparțin unuia dintre următoarele trei cazuri:

1. două soluții reale: $\Delta > 0 \implies x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$
2. o soluție reală/două soluții reale identice: $\Delta = 0 \implies x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
3. nicio soluție reală: $\Delta < 0 \implies x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$

≥ Dacă x_1, x_2 sunt rădăcinile (soluțiile) ecuației (1) atunci au loc următoarele relații (cunoscute și ca *relațiile lui Viète*): $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. Dacă $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ și $S = x_1 + x_2$, $P = x_1 x_2$ atunci ecuația $x^2 - Sx + P = 0$ are ca soluții reale pe x_1 și x_2 .

Observații: $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$, $x_1^3 + x_2^3 = S(S^2 - 3P)$.

≥ O expresie de forma $ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ se numește *trinom de gradul al doilea*.

Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ și $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sunt rădăcinile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ atunci $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

≥ Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ se numește *funcție de gradul al doilea*. Ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ se numește *ecuație asociată* funcției de gradul II. Orice funcție de gradul II admite o *formă canonică*:

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$$

≥ Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$. Spunem că $x_0 \in D$ este un punct de *minim (maxim)* al funcției f dacă $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in D$ ($f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in D$). Numărul $f(x_0)$ se numește *valoare minimă (maximă)* a funcției f .

≥ Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$:

1. dacă $a > 0$ atunci funcția f are minim $x_{\min} = -\frac{b}{2a}$ este punctul minim și $f(x)_{\min} = -\frac{\Delta}{4a}$ este valoarea minimă a funcției
2. dacă $a < 0$ atunci funcția f are maxim, $x_{\max} = -\frac{b}{2a}$ este punctul de maxim și $f(x)_{\max} = -\frac{\Delta}{4a}$ este valoarea maximă a funcției

Observații: $a > 0 \implies f(x)_{\min} = -\frac{\Delta}{4a} \implies Im f = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$

$a < 0 \implies f(x)_{\max} = -\frac{\Delta}{4a} \implies Im f = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$

$x = -\frac{b}{2a}$ este axa de simetrie a G_f

≥ Graficul funcției de gradul al doilea este o curbă numită *parabolă*. Punctul $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ se numește *vârful* parabolei. Graficul se intersectează **tot timpul** cu axa Oy în punctul de coordonate $(0, f(0))$, iar intersecția cu axa Ox acceptă **trei cazuri**:

1. $\Delta < 0$: ecuația nu are soluții în $\mathbb{R} \implies G_f \cap Ox = \emptyset$

2. $\Delta = 0$: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} \implies G_f \cap Ox = V\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$, axa Ox este **tangentă** la parabolă

3. $\Delta > 0$: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_1 \neq x_2 \implies G_f \cap Ox = \{A(x_1, 0), B(x_2, 0)\}$

Observație: calculăm imaginile unor valori de o parte și de alta a vârfului pentru a desena parabola cât mai exact.

≥ Dacă $a > 0$ atunci funcția f este strict descrescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ și strict crescătoare pe $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$. Dacă $a < 0$ atunci funcția f este strict crescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ și strict descrescătoare pe $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$. **Observație:** f (orice funcție de gradul II) nu este monotonă pe $\mathbb{R}$.

≥ A stabili semnul funcției f înseamnă a determina intervalele pe care funcția este pozitivă sau negativă. Intervalele acestea sunt dependente de semnul lui Δ și al lui a după cum urmează:

1. $\Delta < 0$: $a > 0 \implies f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$a < 0 \implies f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

2. $\Delta = 0$: $a > 0 \implies f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$a < 0 \implies f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

3. $\Delta > 0$: $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$

$a > 0 \implies f(x) > 0$

$a < 0 \implies f(x) < 0$

≥ Semnul unei funcții de gradul I urmează următoarele reguli:

$x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right) \implies f(x)$ are semnul opus lui a

$x \in \left(-\frac{b}{a}, +\infty\right) \implies f(x)$ are semnul lui a

$x = -\frac{b}{a} \implies f(x) = 0$

≥ În funcție de semnul lui S și P menționate anterior în cadrul relațiilor lui Viète putem stabili câteva relații între rădăcinile x_1 și x_2 ale unei ecuații de gradul II:

$S > 0, P > 0 \implies x_1 < 0, x_2 > 0$

$S < 0, P > 0 \implies x_1 < 0, x_2 < 0$

$S > 0, P < 0 \implies x_1 < 0, x_2 > 0, |x_2| > |x_1|$

$S < 0, P < 0 \implies x_1 < 0, x_2 > 0, |x_1| > |x_2|$

REZOLVAREA UNOR SISTEME DE DOUĂ ECUAȚII CU DOUĂ NECUNOSCUTE

sisteme formate dintr-o ecuație de gradul I și una de gradul II: din ecuația de gradul I

exprimăm o necunoscută în funcție de cealaltă, înlocuim în a doua ecuație

≥ Prin *soluția unui sistem* înțelegem o pereche $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ care verifică ambele ecuații ale sistemului. Soluțiile sistemului reprezintă intersecțiile dintre dreaptă și parabolă.

sisteme omogene:

≥ O ecuație de forma $ax^2 + bxy + cy^2 = d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ se numește *ecuație omogenă* de gradul al doilea cu necunoscutele x și y . Un sistem format din două ecuații omogene se numește *sistem omogen*. Forma lui generală arată astfel: (1) $\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d \\ mx^2 + nxy + py^2 = q \end{cases}$. Soluția sistemului (1) este o pereche $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. **Observații:** dacă $d = 0$ sau $q = 0$ atunci alegem acea ecuație și împărțim cu y^2 (sau descompunem în factori). Dacă $d \neq 0$ și $q \neq 0$ înmulțim convenabil ecuațiile și le adunăm-scădem astfel încât să obținem 0 în dreapta.

sisteme simetrice:

≥ O ecuație în necunoscutele x și y se numește *simetrică* dacă prin schimbarea necunoscutelor între ele ecuația nu se schimbă: $2x^2 - 3x - 3y + 2y^2 = 5$ (de

$$x \longleftrightarrow y : 2y^2 - 3y - 3x + 2x^2 = 5$$

exemplu). Un sistem în care ambele ecuații sunt simetrice se numește *sistem simetric*.

Indicație generală de rezolvare:

notăm $S = x + y$, $P = xy \implies$ sistemul în necunoscutele S și P este mai simplu

GEOMETRIE

VECTORI ÎN PLAN

≥ Prin *segmentul* (AB) înțelegem mulțimea punctelor dreptei AB situate între punctele A și B (puncte ce sunt numite și *capete* sau *extremități*).

≥ Prin *segmentul orientat* $\overrightarrow{AB}$, notat $\overline{AB}$, înțelegem segmentul (AB) împreună cu o ordine bine determinată a capetelor sale, adică A este *originea* și B este *vârful*. Acestea fiind spuse, $\overline{AB} \neq \overline{BA}$.

≥ *Lungimea* segmentului orientat $\overline{AB}$ este lungimea segmentului (AB) . Aceasta se notează $|\overline{AB}|$. Spunem că două segmente orientate $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ au aceeași lungime dacă $AB = CD$.

≥ *Direcția* segmentului orientat $\overline{AB}$ este formată din dreapta AB și toate dreptele $d \parallel AB$.

Observație: segmentele orientate $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ au aceeași direcție dacă $AB \parallel CD$ sau A, B, C, D coliniare.

≥ Fie $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ două segmente orientate cu aceeași direcție. Spunem că segmentele orientate au același *sens* dacă punctele B și D se află de aceeași parte a dreptei AC sau dacă semidreptele (AB) și (CD) se includ una pe cealaltă.

≥ Spunem că segmentele orientate $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ sunt *echipolente* dacă au aceeași lungime, direcție și sens. Relația de echipolență se notează astfel: $\overline{AB} \sim \overline{CD}$.

$$\overline{AB} \sim \overline{CD} \iff \begin{cases} AB = CD \\ AB \parallel CD \text{ sau } A - B - C - D \\ A \rightarrow B, C \rightarrow D \text{ același sens} \end{cases}$$

≥ Proprietăți:

$\overline{AB} \sim \overline{AB}$ (reflexivitate)

$\overline{AB} \sim \overline{CD} \iff \overline{CD} \sim \overline{AB}$ (simetrie)

$\left. \begin{matrix} \overline{AB} \sim \overline{CD} \\ \overline{CD} \sim \overline{EF} \end{matrix} \right\} \implies \overline{AB} \sim \overline{EF}$ (tranzitivitate)

≥ Deoarece relația de echipolență este reflexivă, simetrică și tranzitivă, echipolența este și o relație de echivalență, ceea ce o determină să împartă mulțimea tuturor segmentelor orientate în *clase de echivalență*. **Observație:** pentru un segment orientat dat există o infinitate de segmente orientate echipolente cu el.

≥ Mulțimea tuturor segmentelor orientate echipolente cu un segment orientat dat se numește *vector*. Vectorul este o clasă de echivalență. **Observație:** Oricare segment orientat este considerat *reprezentant* al vectorului: $\overrightarrow{AB}$ segment orientat

$\overrightarrow{AB}$ vector (liber)

$$\overrightarrow{AB} = \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}, \dots\}$$

≥ Prin *modulul* sau *lungimea* vectorului $\overrightarrow{AB}$ înțelegem $|\overrightarrow{AB}| = AB = BA$.

≥ Prin *direcția* vectorului $\overrightarrow{AB}$ înțelegem dreapta AB și $(\forall)d \parallel AB$.

≥ *Sensul* vectorului $\overrightarrow{AB}$ este de la A la B , unde A se numește *origine* și B *vârf*.

$$\vec{u} = \vec{v} \iff \begin{cases} \text{-au același modul: } |\vec{u}| = |\vec{v}| \\ \text{-au aceeași direcție} \\ \text{-au același sens} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff \begin{cases} AB = CD \\ AB \parallel CD \text{ sau } A, B, C, D \text{ coliniare} \\ B, D \text{ de aceeași parte al lui } AC \end{cases}$$

Observație: dacă A, B, C, D nu sunt toate coliniare: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff ABDC$ paralelogram.

Observație: dacă $A = B$, atunci $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ (vector nul). Vectorul nul are următoarele proprietăți: direcția este orice dreaptă (nu este bine definită) și originea este egală cu vârful.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BA} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{-același modul} \\ \text{-aceeași direcție} \\ \text{-sens opus} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BA} \end{array}} \right\} \text{vectori opuși}$$

$$-\vec{v} \longrightarrow \text{opusul vectorului } \vec{v}; \quad \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}.$$

Operații cu vectori liberi

adunarea vectorilor:

≥ Notăm cu V mulțimea tuturor vectorilor. Dacă avem vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$, atunci și suma lor, vectorul $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, aparține de asemenea lui V .

1. $\vec{u}$ și $\vec{v}$ au **același** sens:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} \\ \vec{v} = \overrightarrow{BC} \end{array} \right\} \implies \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC} = \vec{w}$$

direcție: aceeași cu $\vec{u}$ și $\vec{v}$

sens: același cu $\vec{u}$ și $\vec{v}$

modul: $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$

2. $\vec{u}$ și $\vec{v}$ au sens **opus**:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} \\ \vec{v} = \overrightarrow{BC} \end{array} \right\} \implies \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$$

direcție: comună cu $\vec{u}$ și $\vec{v}$

sens: același cu $\vec{u}$ **pentru că** $|\vec{u}| > |\vec{v}|$

3. $\vec{u}$ și $\vec{v}$ au sens **opus** și $|\vec{u}| = |\vec{v}|$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = -\vec{u} \\ \vec{u} = -\vec{v} \end{array} \right\} \text{ vectori opuși}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$$

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$$

4. $\vec{u}$ și $\vec{v}$ au **direcții diferite**:

Regula triunghiului:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} \\ \vec{v} = \overrightarrow{BC} \end{array} \right\} \implies \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$$

Regula paralelogramului:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} \\ \text{ABCD paralelogram} \end{array} \right\} \implies \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD}$$

$$\forall A, B, C \text{ puncte din plan: } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

≥ Proprietăți:

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}), \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V \text{ (asociativitate)}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V \text{ (comutativitate)}$$

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}, \forall \vec{u} \in V \text{ } (\vec{0} \in V \text{ element neutru})$$

$$\forall \vec{v} \in V \longrightarrow (\exists) -\vec{v} \in V$$

≥ Generalizare: *regula poligonului*: suma vectorilor este vectorul care închide poligonul.

Acesta are originea primului vector și vârful ultimului vector.

Înmulțirea vectorilor:

≥ Prin *produsul* dintre numărul real α și vectorul $\vec{v}$ înțelegem vectorul $\alpha \cdot \vec{v}$ cu proprietățile:

are **aceeași** direcție cu $\vec{v}$ ($\alpha \neq 0$); are **același** sens cu $\vec{v}$ dacă $\alpha > 0$ și sens **opus** lui $\vec{v}$ dacă

$\alpha < 0$; modulul $|\alpha \cdot \vec{v}| = |\alpha| \cdot |\vec{v}|$; dacă $\alpha = 0$ sau $\vec{v} = \vec{0}$, atunci $\alpha \cdot \vec{v} = \vec{0}$.

≥ Proprietăți:

$$(\alpha + \beta) \cdot \vec{v} = \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{v}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ și } \vec{v} \in V$$

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}, \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ și } \vec{u}, \vec{v} \in V$$

$$\alpha(\beta \cdot \vec{v}) = \beta(\alpha \cdot \vec{v}) = \alpha\beta \cdot \vec{v}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ și } \vec{v} \in V$$

$$1 \cdot \vec{v} = \vec{v}, \forall \vec{v} \in V$$

VECTORI COLINIARI

≥ Doi vectori care au aceeași direcție se numesc vectori *coliniari*. Fie $\vec{u}, \vec{v} \in V$, $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Atunci $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt coliniari dacă și numai dacă $\exists \alpha \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v}$.

≥ Dacă $\vec{u}$ și $\vec{v}$ nu au aceeași direcție, atunci ei se numesc *necoliniari*. **Consecință:** dacă $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt necoliniari și $p \cdot \vec{u} + q \cdot \vec{v} = \vec{0}$, $p, q \in \mathbb{R}$ atunci $p = q = 0$.

≥ Mulțimea formată din doi vectori necoliniari se numește **bază**. **Observație:** orice vector din plan se exprimă în mod unic în funcție de doi vectori coliniari.

$(\vec{u}, \vec{v})$ bază

$$\left. \begin{aligned} \vec{w} &= a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} \\ \vec{w} &= c \cdot \vec{u} + d \cdot \vec{v} \end{aligned} \right\} \implies a = c, b = d$$

$$\left. \begin{aligned} a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} &= c \cdot \vec{u} + d \cdot \vec{v} \\ (a - c)\vec{u} + (b - d)\vec{v} &= \vec{0} \\ \text{fie } p = a - c \text{ și } q = b - d \end{aligned} \right\} \implies \begin{aligned} p &= q = 0 \\ a &= c \\ b &= d \end{aligned}$$

$\vec{u}, \vec{v}$ necoliniari

DESCOMPUNEREA UNUI VECTOR

≥ Pentru orice vector $\vec{w} \in V \exists a, b \in \mathbb{R}$ și baza $(\vec{u}, \vec{v})$ astfel încât $\vec{w} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}$, unde a și b se numesc **componentele** lui $\vec{w}$ după baza $(\vec{u}, \vec{v})$.

REPER CARTEZIAN ÎN PLAN

≥ Fie punctele x, y, O și dreptele $Ox \perp Oy$. Numim planul (xOy) **sistem** sau **reper cartezian**, unde Ox se numește **axa absciselor** și Oy **axa ordonatelor**. $\forall A$ punct în plan există perechea $(x_a, y_a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ numită **coordonatele** lui A , unde x_a se numește **abscisă** și y_a **ordonată**.

≥ Vectorii $\vec{i}$ și $\vec{j}$ se numesc **versori ai axelor** și au următoarele proprietăți:

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$$

$$\vec{i} \perp \vec{j}$$

$\vec{i}$ direcția lui Ox

$\vec{j}$ direcția lui Oy

Cum $\vec{i}$ și $\vec{j}$ sunt vectori necoliniari, ei reprezintă o bază.

≥ Orice vector $\vec{OA}$ dintr-un reper cartezian unde O se numește **origine** și are coordonatele $(0, 0)$ poate fi descompus după baza $(\vec{i}, \vec{j})$ după cum urmează: $\vec{OA} = x_a \cdot \vec{i} + y_a \cdot \vec{j}$.

$$\vec{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}, \forall A, B \text{ din plan.}$$

≥ Operațiile cu vectorii scriși în funcție de $\vec{i}$ și $\vec{j}$ se realizează în felul următor:

$$\vec{u} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}, \vec{v} = c \cdot \vec{i} + d \cdot \vec{j} \implies \vec{u} + \vec{v} = (a + c)\vec{i} + (b + d)\vec{j}, k \cdot \vec{u} = k \cdot a \cdot \vec{i} + k \cdot b \cdot \vec{j}.$$

Modulul vectorului $\vec{u}$ poate fi exprimat în funcție de componentele a și b folosind formula

$$|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}. \text{ **Observații:}** } \vec{u} = \vec{v} \iff a = c, b = d; \vec{u}, \vec{v} \text{ coliniari } \iff \frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

PARALELISM, COLINIARITATE ȘI CONCURENȚĂ

≥ Fie segmentul $[AB]$, punctul $M \in [AB]$, punctul fix $O \notin [AB]$ și raportul $\frac{MA}{MB} = k > 0$ în

care punctul M împarte segmentul $[AB]$. $\vec{OA}$ se numește **vectorul de poziție** al punctului A și

se notează $\vec{r}_A$. Vectorul de poziție al punctului M poate fi exprimat în funcție de $\vec{r}_A$ și

$$\vec{r}_B (\vec{OB}): \vec{OM} = \frac{1}{k+1} \vec{OA} + \frac{k}{k+1} \vec{OB}. \text{ Dacă } M \text{ este mijlocul segmentului } [AB], \text{ atunci}$$

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}).$$

≥ Vectorul de poziție al centrului de greutate G al unui triunghi oarecare $\triangle ABC$ poate fi exprimat în funcție de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ și $\overrightarrow{OC}$ astfel:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \right), \forall O \in \mathcal{P}$$

Dacă $O = G$ atunci $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

PARALELISM, TEOREMA LUI THALES ȘI TEOREMA BISECTOAREI

≥ *Teorema lui Thales*: o paralelă dusă la una din laturile unui triunghi (care nu trece prin niciun vârf al triunghiului) formează cu celelalte două laturi *segmente proporționale*. Fie $\triangle ABC$, $M \in AB$, $M \neq A$, $M \neq B$ și $N \in AC$, $N \neq A$, $N \neq C$. Dacă $MN \parallel BC$, atunci $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

≥ *Teorema bisectoarei*: dacă semidreapta AD este bisectoarea unghiului $\angle A$ din triunghiul $\triangle ABC$, atunci $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD} \iff \frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB}$.

≥ Vectorul de poziție al centrului cercului înscris I într-un triunghi oarecare $\triangle ABC$ poate fi exprimat în funcție de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ și $\overrightarrow{OC}$ și laturile $a = BC$, $b = AC$ și $c = AB$ astfel:

$$\overrightarrow{OI} = \frac{a}{a+b+c} \overrightarrow{OA} + \frac{b}{a+b+c} \overrightarrow{OB} + \frac{c}{a+b+c} \overrightarrow{OC}$$

PROBLEME DE COLINIARITATE, TEOREMA LUI MENELAUS

≥ *Teorema lui Menelaus*: fie $A' \in BC$, $B' \in AC$, $C' \in AB$ în $\triangle ABC$. A' , B' și C' sunt coliniare dacă și numai dacă $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$.

≥ Vectorul de poziție al ortocentrului H al unui triunghi oarecare $\triangle ABC$ poate fi exprimat în funcție de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ și $\overrightarrow{OC}$ astfel: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$. Relația anterioară împreună cu relația $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$ sunt cunoscute sub numele de *relațiile lui Sylvester*.

PROBLEME DE CONCURENȚĂ, TEOREMA LUI CEVA

≥ *Teorema lui Ceva*: fie $\triangle ABC$ și $D \in (BC)$, $E \in (AC)$, $F \in (AB)$. Dreptele AD , BE și CF sunt coliniare dacă și numai dacă $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$. În același triunghi $\triangle ABC$ are loc și *relația lui Van Aubel*: $\frac{FA}{FB} + \frac{EA}{EC} = \frac{OA}{OD}$.

ELEMENTE DE TRIGONOMETRIE

≥ Fie triunghiul dreptunghic $\triangle ABC$, $m(\angle A) = 90^\circ$. Se definesc următoarele notații:

$m(\angle B) = B$, $m(\angle C) = C$ și $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

≥ *Sinusul* unui unghi reprezintă raportul dintre cateta opusă și ipotenuză.

≥ *Cosinusul* unui unghi reprezintă raportul dintre cateta alăturată și ipotenuză.

≥ *Tangenta* unui unghi reprezintă raportul dintre cateta opusă și cateta alăturată. Alternativ, ea poate fi exprimată prin raportul dintre $\sin$ și $\cos$.

≥ *Cotangenta* unui unghi reprezintă raportul dintre cateta alăturată și cateta opusă.

Alternativ, ea poate fi exprimată prin raportul dintre $\cos$ și $\sin$:

$$\sin B = \frac{b}{a}, \cos B = \frac{c}{a}, \tan B = \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\cos B}, \cot B = \frac{c}{b} = \frac{\cos B}{\sin B}$$

n. a.: În ciuda faptului că notațiile mai firești pentru funcțiile tangentă, respectiv cotangentă sunt "tg" și "ctg", toate aparițiile acestora vor fi indicate prin notațiile internaționale "tan", respectiv "cot".

≥ Pentru orice unghi $x \in (0, 90^\circ)$ au loc următoarele relații:

$$\sin x = \cos(90^\circ - x)$$

$$\cos x = \sin(90^\circ - x)$$

$$\tan x = \cot(90^\circ - x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cot x}$$

$$\cot x = \tan(90^\circ - x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$$

≥ **Formula fundamentală a trigonometriei** este adevărată $\forall x \in [0, 360^\circ]$: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

≥ Măsura unui arc de cerc este egală cu măsura unghiului la centru corespunzător:

$$m(\widehat{AB}) = m(\angle AOB) = \alpha^\circ$$

$$m(\widehat{CD}) = m(\widehat{AB}) = m(\angle COD) = m(\angle AOB) = \alpha^\circ$$

Observație: măsura unui arc de cerc nu depinde de raza cercului. În schimb, măsura influențează, alături de rază, lungimea arcului:

$$l_{\widehat{AB}} = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot \alpha^\circ \text{ (forma simplificată al lui } \frac{2\pi R}{360^\circ} \cdot \alpha^\circ \text{)}$$

≥ **Radianul** este măsura unui arc de cerc a cărui lungime este egală cu raza cercului.

Măsura unui unghi în radiani se notează $\mu(\angle AOB)$. Transformarea din grade sexagesimale în radiani se face astfel:

$$\mu(\widehat{MN}) = \mu(\angle MON) = \frac{l_{\widehat{MN}}}{R} \text{ (sau se derivă din egalitatea: } \pi \text{ rad} = 180^\circ \text{)}$$

CERCUL TRIGONOMETRIC

≥ Orice sistem cartezian este compus din patru *cadrane*: cadrantul I: $x > 0, y > 0$

cadrantul II: $x < 0, y > 0$

cadrantul III: $x < 0, y < 0$

cadrantul IV: $x > 0, y < 0$

≥ Fie punctele $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$. Distanța dintre punctele A și B se calculează prin formula $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$. **Observații:** dacă $A \in Ox$, atunci A are coordonatele $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$; dacă $A \in Oy$, atunci A are coordonatele $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$.

≥ Cercul cu centrul în originea axelor O și rază 1 împreună cu cele două *sensuri de parcurgere* (pozitiv, respectiv negativ) se numește *cerc trigonometric*. $\forall t \in [0, 2\pi]$ îi asociem $M_t \in \mathcal{C}$ astfel încât $l_{\widehat{AM_t}} = t$. $\forall t \in \mathbb{R} \implies t = 2\pi \cdot k + t_0$, unde $k \in \mathbb{Z}$, $t_0 \in [0, 2\pi)$ rest.

Observație: oricărui număr real t îi putem asocia un punct pe cercul trigonometric astfel încât lungimea arcului $\widehat{AM}$ să fie t_0 .

≥ Funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}(0, 1)$, $F(t) = M_t \in \mathcal{C}$ se numește *funcția de acoperire a cercului trigonometric*. $\forall t \in \mathbb{R} \rightarrow M_t \in \mathcal{C} \implies M_t(x_M, y_M)$.

FUNCȚIILE SINUS ȘI COSINUS

≥ Fie un număr real t și $M_t \in \mathcal{C}$ punctul corespunzător pe cercul trigonometric. Prin *cosinusul* numărului real t înțelegem abscisa punctului M și notăm $\cos t = x_M$. Prin *sinusul* numărului real t înțelegem ordonata punctului M și notăm $\sin t = y_M$. Funcția

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \cos t$ se numește *funcția cosinus* și funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = \sin t$ se numește *funcția sinus*. Intervalul $(0, 2\pi)$ se numește *primul cerc trigonometric*.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$\cos x$	1	0	-1	0	1

$\geq$ Proprietăți:

$$\forall x \in \mathbb{R} \implies \cos x \in [-1, 1], \sin x \in [-1, 1]$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R} \quad \textbf{Observație:} (\cos x)^2 = \cos^2 x \neq \cos x^2$$

$$\begin{cases} \sin(x + 2k\pi) = \sin x \\ \cos(x + 2k\pi) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases} \implies \text{funcțiile } \sin \text{ și } \cos \text{ sunt funcții periodice cu}$$

perioada de forma $T = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\cos(-x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R} \implies \text{funcția cosinus este o funcție } \textbf{pară}$$

$$\sin(-x) = -\sin x, \forall x \in \mathbb{R} \implies \text{funcția sinus este o funcție } \textbf{impară}$$

	CI	CII	CIII	CIV
$\sin x$	+	+	-	-
$\cos x$	+	-	-	+

REDUCEREA LA PRIMUL CADRAN

$$\begin{cases} \sin(\pi - x) = \sin x \\ \cos(\pi - x) = -\cos x \end{cases} \quad \text{CII} \rightarrow \text{CI}$$

$$\begin{cases} \sin(\pi + x) = -\sin x \\ \cos(\pi + x) = -\cos x \end{cases} \quad \text{CIII} \rightarrow \text{CI}$$

$$\begin{cases} \sin(2\pi - x) = -\sin x \\ \cos(2\pi - x) = \cos x \end{cases} \quad \text{CIV} \rightarrow \text{CI}$$

$$\sin(90^\circ - x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos(90^\circ - x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

FORMULE PENTRU SINUSUL ȘI COSINUSUL SUMEI ȘI DIFERENȚEI DE UNGHIIURI

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : \cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

FORMULE PENTRU SINUSUL ȘI COSINUSUL ARGUMENTULUI DUBLU ȘI TRIPLU

$$\begin{cases} \sin 2x = 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \\ \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x \\ \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} \\ \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \\ \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \end{cases}$$

FUNCȚIILE TRIGONOMETRICE TANGENTĂ ȘI COTANGENTĂ

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}, t \notin \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}, \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}, t \in \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

≥ Prin *tangenta* numărului $t \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ înțelegem $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$. Prin *cotangenta* numărului $t \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ înțelegem $\cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$.

≥ Funcția

$$\tan t : \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, \tan = \frac{\sin t}{\cos t}$$

se numește *funcția tangentă*. Funcția

$$\cot t : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

se numește *funcția cotangentă*.

≥ Proprietăți:

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \implies \tan t \in \mathbb{R} \\ \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \implies \cot t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \forall x \in D_1, D_1 = \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \\ 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}, \forall x \in D_2, D_2 = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan(x + k\pi) = \tan x, \forall x \in D_1, \forall k \in \mathbb{Z} \\ \cot(x + k\pi) = \cot x, \forall x \in D_2, \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases} \implies \text{funcțiile } \tan \text{ și } \cot \text{ au perioadă principală } \pi$$

x	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	$\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
$\tan x$	+	-	+	-
$\cot x$	+	-	+	-

$$\begin{cases} \tan(-x) = -\tan x, \forall x \in D_1 \\ \cot(-x) = -\cot x, \forall x \in D_2 \end{cases} \implies \text{funcțiile } \tan \text{ și } \cot \text{ sunt impare}$$

$$\begin{cases} \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x \\ \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x \end{cases}$$

FORMULE PENTRU TANGENTA SUMEI ȘI DIFERENȚEI DE UNGHIIURI

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}, \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}, \cot(a+b) = \frac{1}{\tan(a+b)}$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$
$\sin x$	0	1	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos x$	1	0	-1	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\tan x$	0	-	0	-	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	1
$\cot x$	-	0	-	0	-	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}, \quad \tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

substituția universală (exprimarea funcțiilor trigonometrice în funcție de tangenta jumătății argumentului):

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}, \quad \tan x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}, \quad \cot x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{2 \tan \frac{x}{2}}$$

TRANSFORMAREA PRODUSELOR ÎN SUME ȘI A SUMELOR ÎN PRODUSE

din sume în produse:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}, \quad \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

din produse în sume:

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)], \quad \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

PRODUSUL SCALAR A DOI VECTORI

≥ Fie $\vec{u}$ și $\vec{v}$ vectori astfel încât $m(\angle \vec{u}, \vec{v}) = \alpha$. Prin *produsul scalar* al vectorilor $\vec{u}$ și $\vec{v}$ înțelegem numărul real notat $\vec{u} \cdot \vec{v}$ cu proprietatea $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$, dacă $\vec{u}$ și $\vec{v}$ nenuli sau $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, dacă $\vec{u}$ sau $\vec{v}$ nul. **Observație:** $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, $\cos \alpha = 0$. Există patru cazuri particulare:

1. $\alpha = 0 \implies \cos \alpha = 1 \implies \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}|$: aceeași direcție, același sens
2. $\alpha = \pi \implies \cos \alpha = -1 \implies \vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| |\vec{v}|$: aceeași direcție, sens diferit
3. $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \implies \cos \alpha > 0 \implies \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
4. $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \implies \cos \alpha < 0 \implies \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

≥ Proprietăți:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \text{ (comutativitate)}$$

$$\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \text{ (distributivitate)}$$

$$\vec{u}(k \cdot \vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k\vec{u} \cdot \vec{v}, k \in \mathbb{R}$$

$$\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}| |\vec{u}| \cos 0 = |\vec{u}|^2$$

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$$

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$$

$$(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2$$

≥ Produsul scalar dintre doi vectori $\vec{u} = \vec{ai} + \vec{bj}$ și $\vec{v} = \vec{ci} + \vec{dj}$ este $\vec{u} \cdot \vec{v} = ac + bd$. Între versorii $\vec{i}$ și $\vec{j}$ mai există și următoarele proprietăți: $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$ și $\vec{j} \cdot \vec{j} = 0$.

APLICAȚII ALE PRODUSULUI SCALAR ÎN GEOMETRIE

≥ *Teorema cosinusului*: în orice triunghi $\triangle ABC$ are loc relația:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$. Folosind notațiile definite anterior, avem setul de relații: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

Din acestea, se pot deriva alte trei relații: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

≥ *Relația lui Stewart*: fie $A, B, C \in d$ astfel încât $B \in (AC)$ și $M \notin d$. Atunci are loc relația $MA^2 \cdot BC + MC^2 \cdot AB - MB^2 \cdot AC = AB \cdot BC \cdot AC$.

≥ *Teorema medianei*: fie $\triangle ABC$ și $M \in (BC)$, $MB \equiv MC$. Notăm segmentul $[AM]$ prin m_a , notație ce indică lungimea medianei din A . Există și notațiile m_b și respectiv m_c pentru a indica lungimea medianei din B , respectiv din C :

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}, m_b^2 = \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4}, m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$$

APLICAȚII TRIGONOMETRIEI ÎN GEOMETRIE

relații între unghiuri:

$$A + B + C = 180^\circ (\pi)$$

$$\sin(A + B) = \sin C \quad (\sin(\pi - C))$$

$$\cos(A + B) = -\cos C \quad (\cos(\pi - C))$$

$$\sin \frac{B + C}{2} = \cos \frac{A}{2} \quad \left(\sin \frac{\pi - A}{2} \right)$$

$$\cos \frac{B + C}{2} = \sin \frac{A}{2} \quad \left(\cos \frac{\pi - A}{2} \right)$$

relații între unghiurile și laturile unui triunghi:

≥ Pe lângă teorema cosinusului avem și *teorema sinusurilor*: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, unde R reprezintă raza cercului circumscris triunghiului.

≥ În cadrul următoarelor formule notația $p = \frac{a+b+c}{2}$ indică *semiperimetrul* unui triunghi:

$$\begin{cases} \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \\ \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \\ \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \\ \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \\ \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} & \left(\cot \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}} \right) \\ \tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \\ \tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} \end{cases}$$

REZOLVAREA TRIUNGHIULUI OARECARE

≥ *A rezolva* un triunghi înseamnă a determina toate elementele sale când cunoaștem câteva dintre ele. **Observație:** în cazul unghiurilor este destul să cunoaștem doar o funcție trigonometrică a fiecăruia dintre ele.

cazul L.U.L. (latură-unghi-latură):

$$\begin{cases} AB = c \\ BC = a \\ m(\angle B) = B \end{cases}$$

$$T \cos \implies AC^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$T \cos \implies \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$C = 180^\circ - A - B$$

cazul U.L.U. (unghi-latură-unghi):

$$\begin{cases} m(\angle A) = A \\ m(\angle B) = B \implies C = 180^\circ - (A + B) \\ AB = c \end{cases}$$

$$T \sin \implies \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \implies a = \frac{c \sin A}{\sin C}, b = \frac{c \sin B}{\sin C}$$

cazul L.L.L. (latură-latură-latură):

$$T \cos \implies \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$$

$$C = \pi - (A + B)$$

FORMULE PENTRU ARIA UNUI TRIUNGHI

$$\mathcal{A}_{ABC} = S_{ABC} = S$$

$$S = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin B}{2}$$

$AA' = h_a$ înălțimea corespunzătoare lui a

h_b înălțimea corespunzătoare lui b

h_c înălțimea corespunzătoare lui c

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}, \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{formula lui Heron})$$

$$S = \frac{a^2 \cdot \sin B \cdot \sin C}{2 \sin A} = \frac{b^2 \cdot \sin A \cdot \sin C}{2 \sin B} = \frac{c^2 \cdot \sin A \cdot \sin B}{2 \sin C}$$

$$S = \frac{abc}{4R}, \quad S = rp,$$

unde R este raza cercului circumscris și r raza cercului înscris.